קורס תורת הקבוצות – אביב תש"ס

פרק ט': סודרים כעוצמות (גרסה 3, 8.1.2005)

161. **הגדרה**. בשם **סודר מונה** נקרא לסודר שאינו שווה עוצמה לאף סודר קטן ממנו.

162. **משפט**. כל סודר α שווה עוצמה לסודר מונה β יחיד, $\beta \leq \alpha$.
הוכחה. יהי β הסודר המזערי שהוא שווה עוצמה ל-α. מכיוון ש- α שווה עוצמה לעצמו קיים סודר β כזה והוא קטן או שווה ל-α. β הוא סודר מונה, כי אילו הוא היה שווה עוצמה ל- $\gamma < \beta$ אז גם γ היה שווה עוצמה ל-α, בניגוד למזעריות β.

163. **משפט**. א. כל סודר סופי הוא סודר מונה.
ב. ω הוא סודר מונה.
ג. כל סודר מונה אינסופי הוא גבולי.
הוכחה. א. אם n סודר סופי ו-$\beta < n$ אז $\beta \subsetneq n$. n הוא קבוצה סופית, ולפי 32א' הוא אינו שווה עוצמה לקבוצה חלקית ממש שלו ולכן אינו שווה עוצמה ל-β.
ב. לפי 38 ω היא קבוצה אינסופית בעוד שכל סודר קטן מ-ω הוא סודר סופי ועל כן הוא קבוצה סופית, שלפי 30ב' אינה שוות עוצמה ל-ω.
ג. יהי α סודר עוקב אינסופי ונראה כי α אינו מונה. נניח כי $\alpha = s(\beta)$, ואז גם β אינסופי, ולכן $\beta \geq \omega$, ולכן $\beta \supseteq \omega$. אם קבוצה A מקיפה קבוצה בת מניה אז לכל x $A \approx A \cup \{x\}$, ולכן $\alpha = s(\beta) = \beta \cup \{\beta\} \approx \beta$, $\beta < \alpha$, ולכן α אינו מונה.

164. **מושג העוצמה**. אם אנו מניחים את אקסיומת הבחירה אז, לפי משפט הסדר הטוב, כל קבוצה A ניתנת לסידור היטב. מכיוון שקיימת העתקת דימיון בין קבוצה סדורה לבין טיפוס הסדר שלה לכן A שוות עוצמה לטיפוס הסדר שלה, ולכן גם לסודר המונה היחיד שטיפוס הסדר שווה עוצמה לו. לכן איננו זקוקים יותר לאקסיומות העוצמה אלא אנו יכולים להגדיר את העוצמה $|x|$ של קבוצה x כמונה הסודר היחיד שהוא שווה עוצמה ל-x, ועבור הגדרה זאת האקסיומות (1) ו-(2) של 61 ו-62 הן משפטים.
בהעדר אקסיומת הבחירה לא נוותר על אקסיומות העוצמה אלא נרחיב את (2) בכך שנאמר שאם x קבוצה הניתנת לסידור טוב (וזה שקול לכך ש-x היא שוות עוצמה לסודר כלשהו) אז $|x|$ הוא הסודר המונה שהוא שווה עוצמה ל-x.

165. **משפט**. אם α, β סודרים מונים, אז $\beta < \alpha$ כסודרים אםם $\beta < \alpha$ כמונים, כלומר אםם $\beta \preceq \alpha$ ו- $\beta \not\approx \alpha$
הוכחה. בכוון הלא טריביאלי, אם $\beta \preceq \alpha$ אז לא יתכן $\alpha < \beta$ כי אז היה $\alpha \preceq \beta$ ולכן גם $\alpha \approx \beta$, בניגוד להנחה ש-α סודר מונה.

166. **משפט**. לכל קבוצה A הסודר המזערי α המקיים $A \not\preceq \alpha$, וקיים כזה לפי 150, הוא סודר מונה. לכן לכל סודר β קיים סודר מונה α הגדול ממנו.
הוכחה. יהי $\beta < \alpha$, אז לפי מזעריות α קיים $A \preceq \beta$. אילו היה $\beta \approx \alpha$ היה גם $A \preceq \alpha$, בניגוד לבחירת A.

167. **משפט**. לכל קבוצה A של סודרים מונים החסם העליון $\bigcup A$ שלה הוא סודר מונה.
הוכחה. נסמן $\alpha = \bigcup A$. אם $\alpha \in A$ אז $\alpha = \bigcup A$ הוא כנדרש. אם $\alpha \notin A$, יהי $\beta < \alpha$ כלשהו ואז מכיוון ש-$\beta \in \alpha = \bigcup A$ קיים $\gamma \in A$ כך ש- $\beta \in \gamma$. אילו היה $\beta \approx \alpha$ אז היה $\gamma \preceq \alpha$ ומכיוון ש- $\gamma \subseteq \alpha$ אז, לפי משפט קנטור ברנשטיין היה $\alpha \approx \gamma$ ומכיוון ש- $\beta \approx \alpha$ היה $\gamma \approx \beta < \gamma$, בניגוד להנחה ש-$\gamma$ הוא סודר מונה, בהיותו איבר של A.

168. **הגדרה**. נגדיר פונקציה $\aleph$ מהסודרים לסודרים המונים ברקורסיה כדלקמן: $\aleph_0 = \omega$, לכל סודר α

$\aleph_{\text{א}+1}$ הוא הסודר המונה העוקב ל- $\aleph_{\text{א}}$ (קיים כזה לפי 166), ולכל סודר גבולי β $\aleph_\beta=\bigcup\{\aleph_\alpha \mid \alpha<\beta\}$ (זהו סודר מונה לפי 167).

המינות הנוכחי שלנו הוא עקבי עם השימוש שלנו ב-$\aleph_0$ כעוצמה של הקבוצות בנות המנייה, כי כאן הגדרנו את $\aleph_0$ כ-ω ו-ω הוא הסודר המונה שהוא שווה עוצמה לכל קבוצה בת מניה.

169. **משפט**. א. תהי $F:\mathrm{On}\to\mathrm{On}$ פונקציה כך שלכל סודר α $F(\alpha+1)>F(\alpha)$ ולכל סודר גבולי β $F(\beta)\ge F(\alpha)$ לכל $\alpha<\beta$ אז F פונקציה עולה.

ב. תהי $F:\mathrm{On}\to\mathrm{On}$ פונקציה עולה אז לכל סודר α קיים $F(\alpha)\ge\alpha$.

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על γ כי אם $\alpha<\gamma$ אז $F(\alpha)<F(\gamma)$. אם γ עוקב יהי $\gamma=\beta+1$. מכיוון ש- $\alpha<\gamma$ קיים $\alpha\le\beta$ ולכן, לפי הנחת האינדוקציה ולפי הנחתנו, $F(\alpha)\le F(\beta)<F(\gamma)$. אם γ גבולי אז גם $\alpha+1<\gamma$, ולכן לפי הנחתנו על F, $F(\alpha)<F(\alpha+1)\le F(\gamma)$.

ב. באינדוקציה על α. ל- $\text{א}=0$ ברור כי $F(0)\ge 0$. ל- $\alpha=\beta+1$ קיים, לפי הנחת האינדוקציה, $F(\alpha)>F(\beta)\ge\beta$, ומכיוון ש- α הוא הסודר העוקב ל-β לכן $F(\alpha)\ge\alpha$. ל-α גבולי קיים, לפי הנחת האינדוקציה, לכל $\beta<\alpha$ $F(\alpha)>F(\beta)\ge\beta$. כך $F(\alpha)\supseteq\alpha$ ולכן $F(\alpha)\ge\alpha$.

170. **מסקנה**. א. $\aleph$ היא פונקציה עולה.

ב. לכל סודר α, $\aleph_\alpha\ge\alpha$.

171. **משפט**. טווח $\aleph$ הוא מחלקת כל הסודרים המונים האינסופיים.

הוכחה. יהי γ סודר מונה אינסופי. לפי 170ב' $\aleph_\gamma\ge\gamma$, לכן קיים סודר β מזערי כך ש- $\aleph_\beta\ge\gamma$. אם $\beta=0$ פירושו של דבר הוא כי $\omega=\aleph_0\le\gamma$, ומכיוון ש-γ אינסופי $\gamma=\omega$ וכך $\gamma=\aleph_0\in\mathrm{Range}(\aleph)$. אם $\beta=\alpha+1$ אז לפי הגדרת β קיים $\aleph_\alpha<\gamma$ ולפי הגדרת $\aleph_{\alpha+1}$ זהו הסודר מונה המזערי הגדול מ-$\aleph_\alpha$ ולכן $\aleph_\beta=\aleph_{\alpha+1}\le\gamma$. מכיוון שלפי בחירת β $\aleph_\beta\ge\gamma$ לכן $\gamma=\aleph_\beta\in\mathrm{Range}(\alpha)$. אם β גבולי אז לפי בחירת β קיים לכל $\alpha<\beta$ $\aleph_\alpha<\gamma$, ולכן $\aleph_\beta=\bigcup\{\aleph_\alpha\mid\alpha<\beta\}\le\gamma$. לכן $\gamma=\aleph_\beta\in\mathrm{Range}(\aleph)$.

172. **משפט**. לכל α $\aleph_\alpha+\aleph_\alpha=\aleph_a$, ובמילים אחרות, $\aleph_\alpha\cdot 2=\aleph_\alpha$.

הערה. משפט זה נובע בקלות ממשפט 174, והוכחתו מובאת כאן רק כמבוא דידקטי להוכחת 174.

הוכחה. באינדוקציה על α. נסדר את הקבוצה $\aleph_\alpha\times 2$ בסדר מילוני שמאלי. זהו סדר טוב, כי הוא סדר מילוני של מכפלה קרטזית של שתי קבוצות סדורות היטב. נראה שטיפוס הסדר γ של קבוצה זאת הוא $\aleph_\alpha$, ומכיוון ש-$\aleph_\alpha$ הוא סודר מונה גם העוצמה של קבוצה זאת היא $\aleph_\alpha$. מכיוון ש- $\aleph_a=|\aleph_\alpha|\le|\aleph_\alpha\times 2|=|\gamma|$ אז $\aleph_\alpha\le\gamma$. נוכיח עתה כי גם $\gamma\le\aleph_\alpha$ וזה נותן $\gamma=\aleph_\alpha$ כנדרש. אנו נוכיח כי $\gamma\le\aleph_\alpha$ ע"י שנראה שלכל $\delta<\gamma$ $\delta<\aleph_\alpha$.

תהי F העתקת הדימיון של $\aleph_\alpha\times 2$ על γ. יהי $\delta<\gamma$, אז $\delta=F(\beta,i)$ היכן ש- $\beta<\aleph_\alpha$ ו- $i<2$. תהי W קבוצת הזוגות הקודמים לזוג $\langle\beta,i\rangle$ בסדר המילוני. היות ו-F היא שומרת סדר והיא על γ לכן $F\restriction W$ היא העתקה חח"ע של W על δ. נראה כי $|W|<\aleph_\alpha$, ואז נדע כי גם $\delta<\aleph_\alpha$. ברור כי $W\subseteq s(\beta)\times 2$. אם β סופי אז גם W סופית וקיים $|W|<\omega\le\aleph_\alpha$. אם β אינסופי אז מכיוון ש- $\beta<\aleph_\alpha$ ו-$\aleph_\alpha$ סודר גבולי, לפי 163ג', גם $s(\beta)<\aleph_a$ ו- $s(\beta)$ אינסופי ולכן $|s(\beta)|=\aleph_\lambda$ עבור $\lambda<\alpha$ מסויים. מכיוון ש- $W\subseteq s(\beta)\times 2$ לכן $|W|\le|s(\beta)|\cdot 2=\aleph_\lambda\cdot 2$. לפי הנחת האינדוקציה $\aleph_\lambda\cdot 2=\aleph_\lambda$, לכן $|W|\le\aleph_\lambda<\aleph_\alpha$. כך, בכל מקרה, $|W|<\aleph_\alpha$ כנדרש.

173. **מסקנה**. לכל α,β $\aleph_\alpha+\aleph_\beta=\aleph_{\max(\alpha,\beta)}$.

174. **משפט**. לכל α $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$, ובמילים אחרות, $\aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha$.

הוכחה. הוכחה זאת דומה מאוד להוכחה של 172, רק שאנו עוסקים בקבוצה $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ ומסדרים אותה בסדר מתאים.

את $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ נסדר כך ש- $\langle \rho, \sigma \rangle < \langle \rho', \sigma' \rangle$ אם $\max(\rho, \sigma) < \max(\rho', \sigma')$ או אם $\max(\rho, \sigma) = \max(\rho', \sigma')$ והזוג $\langle \rho, \sigma \rangle$ קודם לזוג $\langle \rho', \sigma' \rangle$ בסדר המילוני השמאלי. קל לראות כי יחס זה הוא יחס סדר טוב. די לנו להראות שטיפוס הסדר γ של $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ הוא $\aleph_\alpha$. מכיוון ש- $|\gamma| = |\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha| \geq |\aleph_\alpha| = \aleph_a$ אז $\gamma \geq \aleph_\alpha$. כדי לקבל את $\gamma = \aleph_\alpha$ נוכיח עתה כי גם $\gamma \leq \aleph_\alpha$, ונעשה זאת ע"י שנראה שלכל $\delta < \gamma$ $\delta < \aleph_\alpha$.

תהי F העתקת הדימיון של $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ על γ. יהי $\delta < \gamma$, אז $\delta = F(\beta_1, \beta_2)$ היכן ש- $\beta_1, \beta_2 < \aleph_\alpha$. תהי W קבוצת הזוגות הקודמים לזוג $\langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ בסדר המילוני. היות ו-F היא שומרת סדר והיא על γ לכן $F \restriction W$ היא העתקה חח"ע של W על δ. נראה כי $|W| < \aleph_\alpha$, ואז נדע כי גם $\delta < \aleph_\alpha$. יהי $\beta = \max(\beta_1, \beta_2)$, ברור כי $W \subseteq s(\beta) \times s(\beta)$. אם β סופי אז גם W סופית וקיים $|W| < \omega \leq \aleph_\alpha$. אם β אינסופי אז מכיוון ש- $\beta < \aleph_\alpha$ ו-$\aleph_\alpha$ סודר גבולי, לפי 163ג', גם $s(\beta) < \aleph_a$ ו- $s(\beta)$ אינסופי ולכן $|s(\beta)| = \aleph_\lambda$ עבור $\lambda < \alpha$ מסויים. מכיוון ש- $W \subseteq s(\beta) \times s(\beta)$ לכן $|W| \leq |s(\beta)| \cdot |s(\beta)| = \aleph_\lambda \cdot \aleph_\lambda$. לפי הנחת האינדוקציה $\aleph_\lambda \cdot \aleph_l = \aleph_\lambda$, לכן $|W| \leq \aleph_\lambda < \aleph_\alpha$. כך, בכל מקרה, $|W| < \aleph_\alpha$ כנדרש.

175. **מסקנה**. לכל α, β $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_{\max(\alpha,\beta)}$.

לאור מה שאמרנו ב-164 תוצאה מאקסיומת הבחירה היא שכל עוצמה אינסופית a היא $\aleph_\alpha$ עבור α כלשהו ולכן 174 אומר שלכל עוצמה אינסופית a קיים $a^2 = a$. את הכוון ההפוך נותן המשפט הבא.

176. **משפט**. אם לכל מונה אינסופי a קיים $a^2 = a$ אז קיים משפט הסדר הטוב, ולכן קיימת אקסיומת הבחירה.

הוכחה. תהי B קבוצה כלשהי, נראה כי אפשר לסדר אותה היטב. נסמן $b = |B|$. לפי משפט הרטוגס, 150 , קיים סודר γ כך ש- $\gamma \not\preceq B$, ואז ברור שקיים γ אינסופי כזה. יהי γ הסודר האינסופי המזערי המקיים $\gamma \not\preceq B$. כמו ב-166, γ זה הוא סודר מונה אינסופי, ולכן נסמנו ב- $\aleph_\beta$. לפי הנחת המשפט, עבור $a = b + \aleph_\beta$, קיים $(b + \aleph_\beta)^2 = b + \aleph_\alpha$, ולכן $b^2 + 2 \cdot b \cdot \aleph_\beta + \aleph_\beta^2 = b + \aleph_\alpha$, ומכאן $b \cdot \aleph_\beta \leq b + \aleph_\beta$. לכן $B \times \aleph_\beta \preceq B \cup \aleph_\alpha$, ותהי $F : B \times \aleph_\beta \to B \cup \aleph_\beta$ חח"ע. לא קיים $x \in B$ כך ש- $F[\{x\} \times \aleph_\beta] \subseteq B$ כי אז היה $B \preceq \{x\} \times \aleph_\beta \approx \aleph_\beta$, בניגוד לבחירת $\aleph_\beta$. לכן לכל $x \in B$ קיים $\delta \in \aleph_\beta$ כך ש- $F(x, \delta) \in \aleph_\beta$, נסמן את ה-$\delta$ המזערי הזה ב- δ_x. נגדיר את $G :\to \aleph_\beta$ ע"י $G(x) = F(x, \delta_x)$. מכיוון ש-F חח"ע גם G כן, ולכן $B \preceq \aleph_\beta$. כך הסדר הטוב של $\aleph_\beta$ משרה סדר טוב על B.